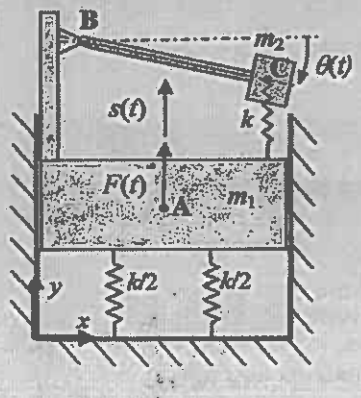


1) (6 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $s(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco e pelo pêndulo **BC**. O bloco tem massa m_1, está ligado a uma fundação por 2 molas lineares elásticas de rigidez $k/2$ e é actuado por uma força $f(t)$. O pêndulo **BC** é formado por uma viga rígida, de comprimento a ($\overline{BC} = a$) e de massa desprezável, e por uma massa m_2 localizada no ponto **C**. O mesmo pêndulo encontra-se ligado ao bloco por uma rótula plana em **B** e por uma mola linear elástica de rigidez k em **C**. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, o sistema está em equilíbrio estático.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) (20%) Supondo que é aplicada uma excitação da forma $f(t) = F\cos\omega t$, com ω a frequência natural do sistema sem o pêndulo, (i.e., o sistema formado apenas pelo bloco e molas que o ligam à fundação), determinar a expressão a que m_2 deve obedecer por forma que as vibrações do bloco cessem.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal.

e) (20%) Supondo que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1$ kg e $k_1 = 2000$ N/m e considerando a resposta estacionária do sistema a uma força $f(t) = 10\cos(48t)$N, obter, utilizando a análise modal truncada, uma estimativa para a força que as molas transmitem à fundação.

2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de secção recta constante com momento polar I_p e de material com módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Na extremidade $x=0$, o veio está ligado a uma mola de torção de rigidez k_t e em $x=\ell/2$ está montada uma roda de momento polar de inércia J.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\Theta(x)=\delta+\frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\Theta(x)$.

Para $k_t=\alpha\frac{GI_p}{\ell}$ e $J=\beta\rho I_p\ell$,

c) (35%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R}=\sqrt{\frac{G}{\rho\ell^2}}g(\delta;\alpha;\beta)$ onde $g(\delta,\alpha,\beta)$ representa uma função.

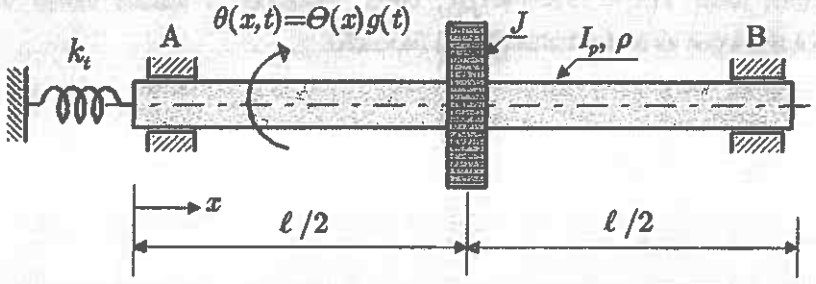
d) (10%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k_t: $k_t\to 0$ e $k_t\to\infty$.

Para $\alpha=2$ e $\beta=9$,

e) (15%) Determinar o valor óptimo do parâmetro δ da função $\Theta(x)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração para o método de Rayleigh.

Para $J=0$, utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção constante, $\theta(x,t)=\left(A\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t+D\sin\omega t\right)$,

f) (20%) estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado.

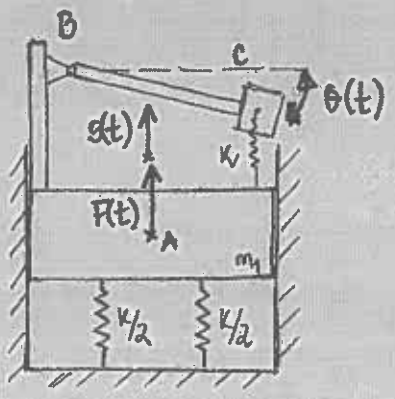


Feup, 23.06.2009
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

2ª Prova de Avaliação - 25/06/2009

PARTE PRÁTICA

1.



G.L. $\begin{cases}\theta(t)\\ s(t)\end{cases}$

$\overline{BC} = a$

a) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})^2$

$V = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{K}{2} \times s^2\right) + \frac{1}{2} K (a \operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{1}{2} K s^2 + \frac{1}{2} K (a\theta)^2$

$q_1 = s \longrightarrow Q_1 = f(t)$

$q_2 = \theta \longrightarrow Q_2 = 0$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_1 \dot{s} + m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta}) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta})$

$\frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial s} = Ks$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = a m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta}) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = a m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta})$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = aK(a\theta) = a^2 K\theta$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) + Ks = f(t) \\ a m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) + a^2 K\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 a \\ m_2 a & m_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & a^2 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $f(t) = F \cos \omega t$

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

$$\left[[K] - \omega^2 [m]\right] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2(m_1+m_2) & -\omega^2 m_2 a \\ -\omega^2 m_2 a & a^2K - \omega^2 m_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{s}(\omega) = \frac{(a^2K - \omega^2 m_2 a^2)F - 0}{[K - \omega^2(m_1+m_2)](Ka^2 - \omega^2 m_2 a^2) - (\omega_2^2 m_2 a)^2}$$

Para que $\bar{s}(\omega) = 0 \quad \therefore \quad a^2K = \omega^2 m_2 a^2$

$$m_2 = \frac{K}{\omega^2}$$

Como $m_1 = \frac{K}{\omega^2} \Rightarrow \boxed{m_2 = m_1}$

c) Considerando

$$\begin{bmatrix} 11 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2000 - 11\omega^2 & -0{,}5\omega^2 \\ -0{,}5\omega^2 & 500 - 0{,}25\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 13{,}43 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 47{,}115 \text{ rad/s} \end{cases}$$

1ª forma modal

$$(-0{,}5\,\omega^2)\,u_1 + (500 - 0{,}25\,\omega^2)\,u_2 = 0$$

$$(0{,}5 \times 13{,}43^2)\,u_1 = (500 - 0{,}25 \times 13{,}43^2)\,u_2$$

$$u_1 = 5{,}044\,u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 5{,}044 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural

$$(-0{,}5 \times 47{,}115^2)\,u_1 = (500 - 0{,}25 \times 47{,}115^2)\,u_2$$

$$u_1 = -0{,}0495\,u_2$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}0495 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

d)

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1[m]\{u\}_1}}\{u\}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}299 \\ 0{,}059 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T[m]\{u\}_2}}\{u\}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}1034 \\ 2{,}0967 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 13{,}43^2\,\eta_1(t) = 0{,}299\,f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1034\,f(t) \end{cases}$$

e) $m_1 = 10\,kg$ $\quad K = 2000\,N/m$

$m_2 = 1\,kg$

$$s(t) = \phi_{21}\,\eta_1(t)$$

$f(t) = 10\cos(48t)$, N

Como $w_2 = 47{,}115$ rad/s $\Rightarrow$ valor + próximo de $w = 48$ rad/s

↳ Eq. 2

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1034\,f(t)$$

Assim:

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = +0{,}1034 \times 10\cos(48t)$$

$$\eta_2(w) = \frac{+\dfrac{0{,}1034\times 10}{47{,}115^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} \qquad \text{Resp harmônica!}$$

$$= 0{,}01228 \qquad \text{com } \beta = \frac{w}{w_n} = \frac{48}{47{,}115}$$

$$\eta_2(t) = 0{,}01228\cos(48t)$$

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = [\phi]\cdot\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}299 & -0{,}1034 \\ 0{,}059 & 2{,}0967 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$s(t) = 0{,}299\underbrace{\eta_1(t)}_{=0} - 0{,}1034\,\eta_2(t)$$

$$= -0{,}1034 \times 0{,}01228\cos(48t) = -0{,}0012698\cos(48t)$$

Assim:

$$\vec{F} = \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}K\begin{Bmatrix} 0 \\ s(t) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_1+m_2)g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}5395\cos(48t) - 11\times 9{,}8 \end{Bmatrix}$$

?

(2.)

a) Condições fronteira:

$x=0 \;\therefore\; (1): \quad GI_p \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = K_t \cdot \theta(x)\Big|_{x=0}$

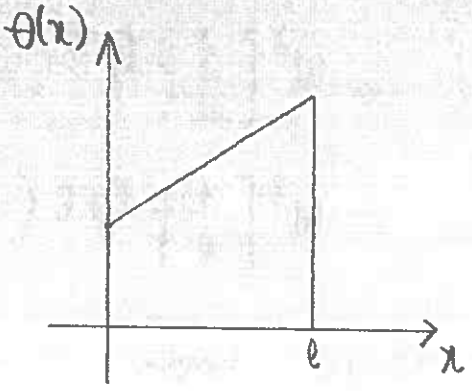
C.F. natural

$x=l \;\therefore\; (2): \quad GI_p \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=l} = 0$ C.F. natural

b) $\theta(x) = \delta + \frac{x}{l}$

- Derivável pelo menos 1 vez (prob de 2ª ordem)

$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{1}{l}$ ✓



- Verificar condições fronteira!

Não existem ✓

c) Para $K_t = \alpha \frac{GI_p}{l}$ e $J = \beta \rho I_p l$

$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l GI_p \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx + V_{cfn} =$

$= \frac{GI_p}{2}\int_0^l \left(\frac{1}{l}\right)^2 dx + \frac{1}{2} K_t \theta(0)^2 =$

$= \frac{GI_p}{2}\left(\frac{1}{l^2}\cdot x\right)_0^l + \frac{1}{2} K_t \delta^2 =$

$= \frac{GI_p}{2}\cdot\frac{1}{l} + \frac{1}{2}\alpha\frac{GI_p}{l}\delta^2 = \frac{1}{2}\frac{GI_p}{l}\left(1+\alpha\delta^2\right)$

$$T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho I_p V(x)^2 dx + I_{qm} \right) =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho I_p}{2} \int_0^{\ell} \left(\delta + \frac{x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} J \theta^2(\ell/2) \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho I_p}{2} \int_0^{\ell} \left(\delta^2 + 2\delta \frac{x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2} \right) dx + \frac{1}{2} J \left(\delta + \frac{\ell/2}{\ell} \right)^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho I_p}{2} \left(\delta^2 x + \frac{2\delta}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\ell^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right)_0^{\ell} + \frac{1}{2} J \left(\delta + 1/2 \right)^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho I_p}{2} \left(\delta^2 \ell + \delta\ell + \ell/3 \right) + \frac{1}{2} J \left(\delta^2 + 2\delta \cdot \frac{1}{2} + 1/4 \right) \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho I_p}{2} \left(\delta^2 \ell + \delta\ell + \ell/3 \right) + \frac{1}{2} \beta \rho I_p \ell \left(\delta^2 + \delta + 1/4 \right) \right]$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho I_p \ell \left(\delta^2 + \delta + 1/3 + \beta\delta^2 + \beta\delta + \beta 1/4 \right) \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho I_p \ell \left(\delta^2 (1+\beta) + \delta (1+\beta) + 1/4\beta + 1/3 \right) \right]$$

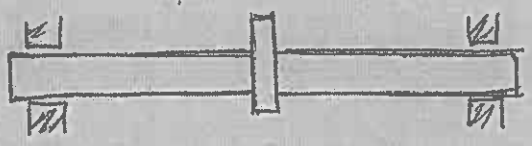
$$V_{max} = T_{max}$$

$$\frac{1}{2} \frac{G I_p}{\ell} (1 + \alpha\delta^2) = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho I_p \ell \left(\delta^2 (1+\beta) + \delta (1+\beta) + 1/4\beta + 1/3 \right) \right]$$

$$\omega^2 = \frac{G (1+\alpha\delta^2)}{\rho \ell^2 \left[\delta^2 (1+\beta) + \delta (1+\beta) + 1/4\beta + 1/3 \right]} = R(\theta(x))$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{(1+\alpha\delta^2)}{\delta^2 (1+\beta) + \delta (1+\beta) + 1/4\beta + 1/3} \right)^{1/2}}_{g(\alpha, \delta, \beta)}$$

d) Para $K_t \to 0$:

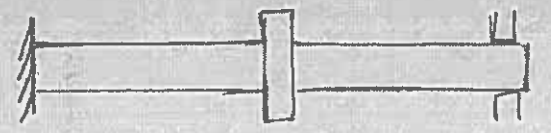


$$GI_p \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \underline{N}$$

$$GI_p \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=\ell} = 0 \quad \underline{N}$$

Admissível F.A !

Para $K_t \to \infty$



$$\theta(x)\big|_{x=0} = 0 \quad \underline{G} \quad \times$$

$$GI_p \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=\ell} = 0 \quad \underline{N} \quad \downarrow$$

Não verifica → F.A não admissível !

e) $$\frac{\delta W_R^2}{\delta \delta} = 0 \therefore \frac{(2\alpha\delta)[\delta^2(1+\beta)+\delta(1+\beta)+1/4\beta+1/3] - [2\delta(1+\beta)+(1+\beta)](1+\alpha\delta^2)}{\delta^2(1+\beta)+\delta(1+\beta)+1/4\beta+1/3}$$

$$(2\alpha\delta)[\delta^2(1+\beta)+\delta(1+\beta)+1/4\beta+1/3] = [2\delta(1+\beta)+(1+\beta)](1+\alpha\delta^2)$$

Com $\alpha = 2$ e $\beta = 9$

$$\delta = \begin{cases} -0{,}50559 \Rightarrow W_R^2 = 18{,}07 \dfrac{G}{\rho L^2} \to W_R = 4{,}25\sqrt{\dfrac{G}{\rho L^2}} \\ 0{,}98893 \Rightarrow W_R^2 = 0{,}133 \dfrac{G}{\rho\ell^2} \to W_R = 0{,}365\sqrt{\dfrac{G}{\rho\ell^2}} \end{cases}$$

Assim , o δ ótimo = 0,98893 !

f) Para $J = 0$

$$\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{w}{c} x + B \operatorname{sen} \frac{w}{c} x\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{w}{c}\left(A \operatorname{sen} \frac{w}{c} x - B \cos \frac{w}{c} x\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$$

Nas condições fronteira:

$$(1): -GI_p \frac{w}{c}(-B)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt) = K_T (A)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$$

$$GI_p \frac{w}{c} B = K_T \cdot A$$

$$(2): -GI_p \frac{w}{c}\left(A \operatorname{sen} \frac{w}{c} l - B \cos \frac{w}{c} l\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt) = 0$$

$$-GI_p \frac{w}{c} A \operatorname{sen} \frac{w}{c} l = -GI_p \frac{w}{c} B \cos \frac{w}{c} l$$

$$B = A \operatorname{tg} \frac{w}{c} l$$

$$K_T A = GI_p \frac{w}{c} A \operatorname{tg} \frac{w}{c} l$$

$$\frac{K_T}{GI_p} = \frac{w}{c} \operatorname{tg} \frac{w}{c} l \quad \therefore \quad \frac{K_T}{GI_p} = \frac{1}{l} \frac{w}{c} l \operatorname{tg} \frac{w}{c} l$$

com $\alpha = \frac{w}{c} l$

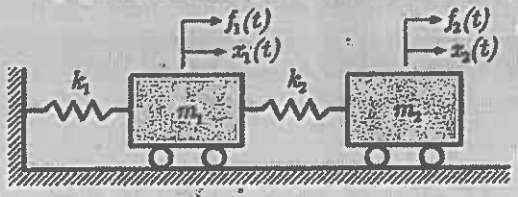
$$\boxed{\frac{K_T \cdot l}{GI_p} = \alpha \tan \alpha}$$

1) (2 val) As equações de movimento de um sistema linear discreto com n graus de liberdade são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\}+[c]\{\dot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{f(t)\}$

a) (30%) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.

b) (35%) Caracterizar, justificando, as formas quadráticas associadas à energia cinética e à energia potencial elástica e, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez.

c) (35%) Definir: i)modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração.



2) (1.5 val) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T=\{1 \quad 1.5\}^T$ e $\{u\}_2^T=\{1 \quad -2\}^T$.

a) (30%) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o primeiro modo natural de vibração;

b) (30%) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda em regime livre com um movimento idêntico ao segundo modo natural de vibração;

c) (40%) Para uma solicitação harmónica $f_1(t)=F\sin\omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a amplitude de resposta $X_2(\omega)$, indicando eventuais pontos notáveis.

3) (1.5 val) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$. A resposta dinâmica em regime forçado pode ser determinada por análise modal.

a) (35%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e a(as) vantagem(s) desta técnica na determinação e análise do regime forçado;

b) (30%) Justificar a utilização de uma base modal truncada. Discutir a dimensão da base modal truncada (número de modos naturais) no caso de uma solicitação harmónica de frequência ω e no caso de uma solicitação transiente "rectangular" de duração t_c.

c) (35%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.

4) (1.5 val) O quociente de Rayleigh é utilizado, entre outras aplicações, para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema discreto ou contínuo.

a) (60%) Referir a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh e indicar quais os requisitos da aproximação da forma fundamental de vibração a utilizar no quociente de Rayleigh para:

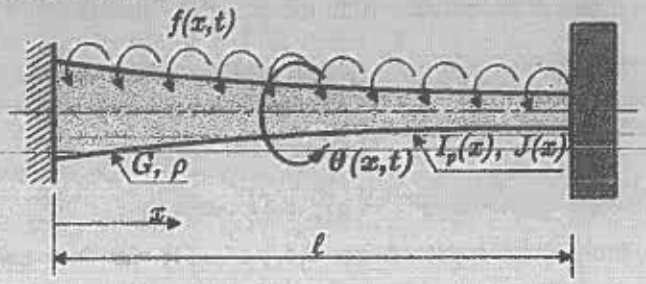
i. um sistema discreto; ii. um sistema contínuo.

b) (40%) Caracterizar o quociente de Rayleigh dum sistema linear discreto para um vector arbitrado $\{v\}$ que verifica a relação $\{v\}^T[m]\{\phi\}_1=0$, onde $[m]$ e $\{\phi\}_1$ representam, respectivamente, a matriz de massa e o primeiro vector modal do sistema.

5) (1.5 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção $\theta(x,t)$.

a) (60%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, estabelecer a equação diferencial de movimento e as condições de fronteira do veio representado.

b) (40%) Escrever as expressões integrais da energia elástica de deformação, da energia cinética e do trabalho das forças não conservativas.



FEUP, 23 de Junho de 2009
José Dias Rodrigues

2ª Prova de Avaliação de 2004-06-25

PARTE TEÓRICA

1

a) COORDENADAS GENERALIZADAS: são coordenadas que descrevem o movimento de um sistema discreto, formando um vector que está projectado numa base qualquer.

COORDENADAS MODAIS: são coordenadas generalizadas quando projectadas numa base modal, que é uma base formada pelos vectores modais.

b) $V = \{u\}^T [K] \{u\}$ (1)

$T = \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\}$ (2)

Pela expressão 1, podemos concluir que a energia potencial é uma função quadrática dos deslocamentos, e que segundo a expressão (2), a energia cinética é uma forma quadrática das velocidades.

Por definição, a energia cinética nunca poderá ser negativa e apenas é nula quando todas as velocidades são nulas, classificando-se assim a energia cinética uma forma quadrática definida positiva e a matriz de massa uma matriz definida positiva. O mesmo acontece para a energia potencial e para a matriz rigidez, contudo, nestes 2 últimos casos há situações em que isso não se sucede.

No caso de sistemas semi-definidos (energia potencial nula, sem que todos os deslocamentos sejam nulos). Assim nestes casos, caracteriza-se a energia potencial como forma quadrática definida positiva e matriz rigidez como matriz semi-definida positiva.

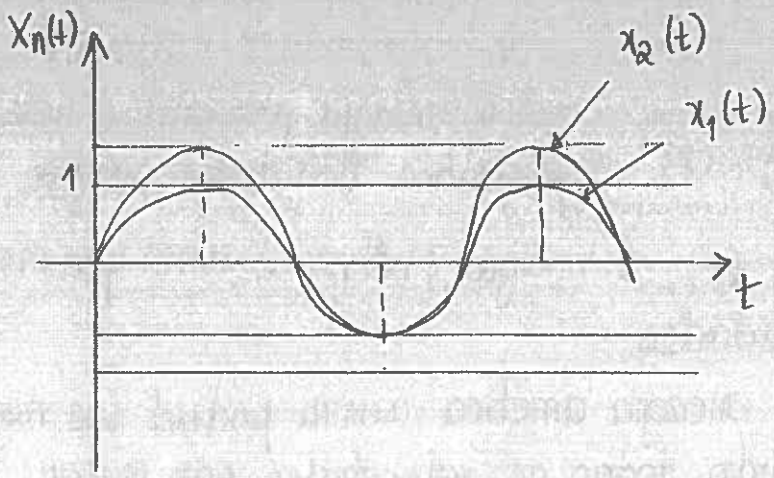
c) i) MODO NATURAL DE VIBRAÇÃO: são os n movimentos sincronos caracterizados pelas freq. naturais ω_n ($n = 1 .. \infty$) e pelos vectores modais $\{u\}_n$ com $n = 1, 2 .. \infty$.

ii) FORMA NATURAL DE VIBRAÇÃO: Representadas pelos vectores modais, que por sua vez são as soluções do sistema homogeneo. Caracterizam a configuração espacial assumida pelo sistema durante o movimento sincrono de frequência ω_n com $n = 1, 2 \ldots \infty$.

iii) NODO DE VIBRAÇÃO: possiveis apenas quando as massas se movimentam em oposição de fase, e é um ponto de elem. elastico, que liga as massas que permanece estacionário.

(2) $\{u\}_1^T = \{1 \quad 1{,}5\}^T$, $\{u\}_2^T = \{1 \quad -2\}^T$ .....

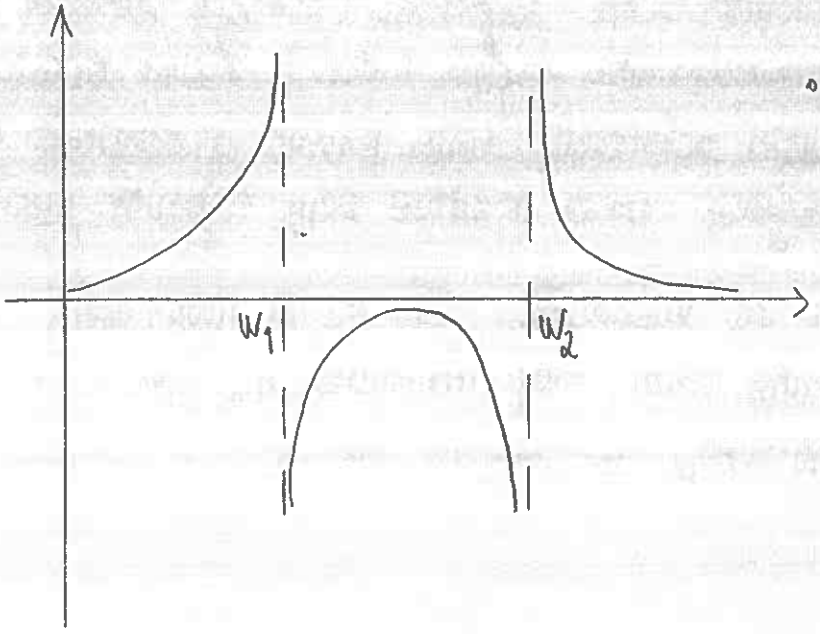
a)



b) $\{x_0\} = \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$

$\{\dot{x}_0\} = \{0\}$ $\{f(t)\} = \{0\}$ regime livre

c)



. Existem 2 condições de ressonância em $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$.

(3.)

a) A técnica da análise modal consiste em transformar coordenadas generalizadas em coordenadas modais através de uma matriz de transformação $[\phi]$.

Tem como principal vantagem o desacoplamento em termos elásticos e de inércia das n equações de movimento, sendo cada uma das equações idênticas à equação diferencial de movimento do sistema com 1 grau de liberdade, no caso de regime não amortecido. Se o regime for amortecido, apenas se consegue o desacoplamento se a matriz de amortecimento verificar a condição de Caughey, ou a condição de proporcionalidade.

b) A análise modal truncada, consiste na determinação da resposta do sistema considerando apenas alguns modos naturais do sistema, isto é, utilizando uma base modal truncada de dimensão p, com $p \leq n$. De referir que os modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada devem ser os que mais contribuem para a resposta do sistema, nomeadamente, os que estão contidos na banda de frequências do espectro da solicitação aplicada.

No caso de solicitação harmónica deve ser tido em atenção os modos naturais de vibração c/ frequências naturais próximas da frequência de excitação. No caso de solicitação transiente, dado que a excitação é multi-frequencial, devemos escolher todos os ω's dentro do período de carga.

c) Os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o reg. forçado amortecido quando a matriz de amortecimento verifica as condições de Caughey, ou mais Redutoramente, as condições de proporcionalidade:

$$[C] = \alpha [m] + \beta [K]$$

No sistema de eq. diferenciais: $\{x(t)\} = [\phi] \{\eta(t)\}$

$$[m][\phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + (\alpha[m]+\beta[K])[\phi]\{\dot{\eta}(t)\} + [K][\phi]\{\eta(t)\} = \{f(t)\}$$

Pre-multiplicando por $[\phi]^T$ e considerando as propriedades de ortogonalidade dos vectores modais ($[\phi]^T[m][\phi]=[I]$ e $[\phi]^T[K][\phi]=[\Omega^2]$)

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + (\alpha[m]+\beta[K])\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T\{f(t)\}$$

↳ que são matrizes diagonalizadas c.q.d

(4.)

a) Propriedades do Quociente de Rayleigh:

• possui um valor estacionário na vizinhança das formas naturais

• é um majorante da frequencia natural fundamental.

i) Sistema discreto

O vector $\{v\}$ pode ser qualquer vector não nulo, sendo que quanto mais próximo ele for da forma natural que se quer calcular, melhor é a aproximação.

ii) Sistema contínuo

Há 2 abordagens:

• Formulação forte: funções de aproximação são funções teste (têm de ser derivaveis o nº de vezes igual à ordem do sistema e têm de obedecer às condições fronteira geom e naturais).

• Formulação fraca: funções de aprox. são funções admissíveis (tem de ser derivaveis um nº de vezes igual a metade da ordem do sistema e têm de verificar apenas as C.F. geométricas).

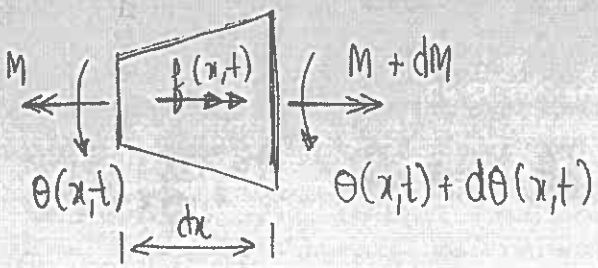
b) $\{\psi\}^T [m] \{\phi\}_1 = 0$

$R(\{\psi\}) \geq \omega_1^2$, dado que pelas propriedades da ortonormalidade os vectores $\{\psi\}^T$ e $\{\phi\}_1$ são ortonormais em relação a $[m]$.

↳ O quociente de Rayleigh é sempre inferior à frequência natural fundamental e o valor mínimo que pode tomar é o da freq. fundamental.

⑤

a)



$M = K_t$

$$\cancel{M} + dM - \cancel{M} + f(x,t) = J(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Como: $M(x,t) = G I_p(x)\,\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$

$$dM(x,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p(x)\,\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)dx$$

Assim em (1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p(x)\,\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = J(x)\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{G I_p(x)\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = J(x)\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}}$$

Condições fronteira:

$x=0 \;\therefore\; \theta(x,t)\big|_{x=0} = 0$

$x=l \;\therefore\; -GIp\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=l} = J\,\frac{d^2\theta}{d^2t}\Big|_{x=l}$

b) $V = \frac{1}{2}\int_0^l GIp\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \underbrace{Vg/n}_{=0}$

$T = w^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l GIp\,\theta(x)^2\,dx + J_V\,\theta(l)^2\right)$

$dW = M(t)\,\delta\theta = GIp\,\frac{d\theta}{dx}\cdot\delta\theta \rightarrow Q = GIp\,\frac{d\theta}{dx}$